Année 1968

THÉORÈME D'APPROXIMATION EN UNE VARIABLE DE MERGELYAN

ÉNONCÉ

On désigne par $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels, par $\mathbf{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls. On rappelle que le support d'une application de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^q$ est le plus petit ensemble fermé dans le complémentaire duquel la restriction de cette application est nulle. Le corps des nombres complexes est noté $\mathbf{C}$; la distance de deux points z et z' de $\mathbf{C}$ est le module de $z-z'$ noté $|z-z'|$. Dans un espace topologique, on désigne l'adhérence d'une partie X par $\overline{X}$.

Dans tout le texte on note $z = x + iy$. $(z \in \mathbf{C},\ x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R})$.

I

1° Soit $t \longmapsto \gamma_1(t)$ la fonction numérique définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\gamma_1(t) = 0 \quad \text{si} \quad t \leqslant 0, \qquad \gamma_1(t) = \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{si} \quad t > 0.$$

Montrer qu'elle est indéfiniment dérivable.

En déduire que la fonction γ définie dans le plan complexe par :

$$\gamma(z) = \gamma_1\left(\frac{1}{2} + |z|\right)\ \gamma_1\left(\frac{1}{2} - |z|\right),$$

dont le support est la boule fermée de centre zéro et de rayon $\frac{1}{2}$, est indéfiniment dérivable en tant qu'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$.

2° On note $\rho(z) = \dfrac{\gamma(z)}{a}$ avec $a = \displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} \gamma(z)\, dx\, dy$

et, pour $m \in \mathbf{R}^+$, $\rho_m(z) = m^2 \rho(mz)$.

Soit Ω un ouvert borné du plan complexe et Ω_1 un ouvert relativement compact de Ω. On désigne par α un nombre strictement positif, par d la borne inférieure de $|z - u|$ pour z élément de Ω_1 et u élément du complémentaire de Ω dans $\mathbf{C}$, par $\Omega_{1,\alpha}$ la réunion des boules ouvertes de rayon αd et de centre dans Ω_1, enfin par $\chi_{1,\alpha}$ la fonction caractéristique de $\Omega_{1,\alpha}$.

Montrer que la fonction :

$$\zeta \longmapsto \chi(\zeta) = \iint_{\mathbf{R}^2} \chi_{1,\alpha}(z)\, \rho_{(\alpha d)^{-1}}(\zeta - z)\, dx\, dy$$

est indéfiniment dérivable en tant qu'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, à support compact dans Ω pour $\alpha < \frac{2}{3}$, et égale à 1 sur Ω_1.

3° Soit g une fonction holomorphe dans Ω; démontrer que, pour tout $z \in \Omega_1$, on a :

$$(1) \qquad g(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbf{R}^2} \frac{\partial \chi}{\partial \bar{u}}\, g(u)\, \frac{dv\, dw}{z - u} \qquad \text{avec} \quad u = v + iw \quad v \in \mathbf{R},\ w \in \mathbf{R}$$

$\left[\text{on rappelle la notation } \frac{\partial \chi}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \chi}{\partial v} + i \frac{\partial \chi}{\partial w}\right)\right]$.

On pourra appliquer la formule de Stokes dans l'ouvert défini par $|z - u| > r$, où r est un nombre strictement positif assez petit.

II

Soit Ω un ouvert, borné ou non, du plan complexe. On note $H^2(\Omega)$ l'espace vectoriel normé des fonctions f holomorphes dans Ω et de carré sommable dans Ω, c'est-à-dire telles que :

$$\|f\|_\Omega = \left(\iint_\Omega |f(z)|^2\, dx\, dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

soit fini.

1° Évaluer $\|f\|_\Omega^2$ à l'aide des coefficients du développement de Taylor à l'origine de la fonction f, dans le cas où Ω est une boule de centre zéro et de rayon R.

2° Démontrer que $H^2(\mathbf{C})$ est réduit à 0.

Soit $z_0 \in \Omega$; on note par $\Omega - \{z_0\}$ l'ensemble des points de Ω distincts de z_0. Montrer que toute fonction de $H^2(\Omega - \{z_0\})$ est la restriction à $\Omega - \{z_0\}$ d'une fonction de $H^2(\Omega)$.

3° Démontrer que si Ω est le demi-plan $y > 0$, alors $H^2(\Omega)$ est de dimension infinie.

4° On se propose de prouver que $H^2(\Omega)$ est un espace complet pour la norme $f \longmapsto \|f\|_\Omega$, donc qu'on peut lui appliquer les résultats de la théorie des espaces de Hilbert.

a. Soit Ω_1 un ouvert relativement compact de Ω et δ un nombre réel strictement positif. On note par Ω_1^δ l'ensemble des points de Ω_1 dont la distance à la frontière de Ω_1 est supérieure ou égale à δ. Démontrer, en utilisant la représentation intégrale (1) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que pour tout couple (φ, ψ) d'éléments de $H^2(\Omega)$ on a une inégalité de la forme :

$$\sup_{z \in \Omega_1^\delta} |\varphi(z) - \psi(z)| \leqslant C \|\varphi - \psi\|_\Omega$$

où le nombre positif C est indépendant de φ et de ψ.

b. En déduire que, si (f_n) est une suite de Cauchy dans $H^2(\Omega)$, (f_n) converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction holomorphe f.

c. Démontrer que cette fonction f appartient à $H^2(\Omega)$ et qu'elle est limite de la suite (f_n) pour la norme de $H^2(\Omega)$.

III

Dans cette partie l'ouvert Ω est supposé borné. On se propose d'étudier sous quelles conditions les polynômes sont denses dans $H^2(\Omega)$.

1° Soit K un compact de la sphère de Riemann (c'est-à-dire du plan complexe compactifié par l'adjonction d'un point noté ∞, une fonction définie dans un voisinage V de ∞ et holomorphe étant une fonction continue sur V, qui est holomorphe au sens habituel dans le complémentaire de ∞ dans V). On considère l'ensemble $\mathcal{H}(K)$ formé des couples (ω, f) où ω est un voisinage ouvert de K, et f une fonction holomorphe dans ω. On introduit dans $\mathcal{H}(K)$ la relation suivante :

$$(\omega, f)\ \mathcal{R}\ (\omega', f')$$

s'il existe ω'' voisinage ouvert de K inclus dans $\omega \cap \omega'$ tel que la restriction de f à ω'' soit égale à celle de f' à ω''.

a. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. On notera par $f^\sim$, ou $(\omega, f)^\sim$, la classe d'équivalence de (ω, f). Le quotient de $\mathcal{H}(K)$ par $\mathcal{R}$ sera noté H(K).

b. Soit (ω_1, f_1) un élément de $f_1^\sim$, (ω_2, f_2) un élément de $f_2^\sim$.

Montrer que, pour tout λ et tout μ appartenant à $\mathbf{C}$, on peut définir $\lambda f_1^\sim + \mu f_2^\sim$ en posant :

$$\lambda f_1^\sim + \mu f_2^\sim = (\omega_1 \cap \omega_2,\ \lambda f_1 + \mu f_2)^\sim,$$

$\lambda f_1 + \mu f_2$ étant définie dans $\omega_1 \cap \omega_2$; H (K) est ainsi muni d'une structure d'espace vectoriel sur **C**.

Démontrer aussi que la valeur de $f^{\sim}$ est définie en tout point k de K par $f^{\sim}(k) = f(k)$ si (ω, f) est un élément de $f^{\sim}$.

2° Dans cette question K est le complémentaire de Ω dans la sphère de Riemann. Soit $f^{\sim}$ un élément de H (K) et (ω, f) un élément de $f^{\sim}$. On considère un ouvert Ω_1, voisinage du complémentaire de ω, et relativement compact dans Ω.

Soit χ une fonction indéfiniment dérivable (en tant qu'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$), égale à 1 sur Ω_1, et à support compact dans Ω. Soit g une fonction holomorphe dans Ω. On pose :

$$F(g) = \iint_{\mathbf{R}^2} f(z)\, g(z) \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}}\, dx\, dy.$$

Démontrer que le nombre F (g) ne dépend pas du choix de la fonction χ; en déduire que F (g) ne dépend pas du choix de l'élément (ω, f) de $f^{\sim}$.

Vérifier que l'application $g \longmapsto F(g)$, restreinte à $H^2(\Omega)$, est une forme linéaire continue.

3° Calculer F (g) pour (ω, f) défini comme suit :

ω est le complémentaire de z dans la sphère de Riemann et f est la fonction $s \longmapsto \dfrac{1}{z - s}$. $(s \in \omega)$.

En conclure que l'ensemble des formes linéaires F, $f^{\sim}$ parcourant H (K), est dense dans le dual de $H^2(\Omega)$.

4° Soit l une forme linéaire continue sur $H^2(\Omega)$ et soit u un élément du complémentaire Π de $\overline{\Omega}$. On considère la fonction Φ_u définie dans Ω par $z \longmapsto \dfrac{1}{z - u}$, et qui appartient à $H^2(\Omega)$. On pose $\mathcal{J}_l(u) = l(\Phi_u)$. Démontrer que la fonction $u \longmapsto \mathcal{J}_l(u)$ est holomorphe dans l'ouvert Π.

5° On désigne par $H^2_0(\Omega)$ le sous-espace fermé de $H^2(\Omega)$ engendré par les restrictions à Ω des fonctions holomorphes dans les voisinages ouverts de $\overline{\Omega}$. Soit l_0 une forme linéaire continue sur $H^2_0(\Omega)$. Démontrer que $\mathcal{J}_{l_0} = 0$ entraîne $l_0 = 0$.

On dit que Ω est étoilé par rapport à l'origine si, pour tout $z \in \Omega$, le segment $[0, z]$ est dans Ω.

Démontrer que si Ω est étoilé par rapport à l'origine, et si de plus il est l'intérieur de son adhérence, on a :

$$H^2_0(\Omega) = H^2(\Omega).$$

[Dans ce but on pourra montrer que, si f est un élément de $H^2(\Omega)$, et si on pose $f_\nu(z) = f(\nu z)$, on a :

$$f_\nu \in H^2_0(\Omega) \quad \text{si} \quad \nu < 1, \qquad \text{puis} \quad f = \lim_{\nu \to 1} f_\nu \,]$$

6° Déterminer les coefficients du développement de $\mathcal{J}_l$ en série de puissances de $\dfrac{1}{u}$ au voisinage de ∞.

7° Si Π n'est pas connexe, démontrer qu'il existe une forme linéaire continue, associée à un élément $f^{\sim}$ de H (K), s'annulant sur les polynômes et non identiquement nulle.

En déduire que les polynômes sont denses dans $H^2_0(\Omega)$ si et seulement si Π est connexe, puis, qu'ils sont denses dans $H^2(\Omega)$ lorsque Ω est étoilé par rapport à l'origine et égal à l'intérieur de son adhérence.

IV

A l'aide des résultats des trois premières questions, on se propose d'étudier une propriété d'approximation dans l'espace H (Ω) des fonctions holomorphes dans un ouvert Ω, borné ou non, de **C**.

Soit (Ω_j) une suite d'ouverts relativement compacts de Ω, telle que tout compact de Ω soit inclus dans l'un des Ω_j $(j = 1, 2, \ldots)$

1° Soit $$p_j(f) = \left(\iint_{\Omega_j} |f(z)|^2\, dx\, dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Une suite (f_n) de H (Ω) sera dite convergente vers un élément f de H (Ω) si, pour tout j, on a :

$$\lim_{n \to \infty} p_j(f_n - f) = 0.$$

Montrer que, étant donnée une série $\Sigma \alpha_j$ de termes tous strictement positifs, telle que $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j = 1$, la fonction :

$$(g, h) \longmapsto d(g, h) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \inf(p_j(h - g), 1)$$

est une distance sur H (Ω), et que les suites convergentes au sens précédent sont les suites convergentes pour la distance d.

2° Démontrer que la topologie introduite dans la question IV, 1°, est la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de Ω.

3° Soit L un compact de Ω. On désigne par L^* la réunion de L et des composantes connexes relativement compactes de son complémentaire par rapport à Ω.

Démontrer que L^* est un compact de Ω.

4° Appliquant IV, 3°, aux $\overline{\Omega}_j^*$, déduire des résultats de la partie III que, si le complémentaire de Ω n'a pas de composante connexe compacte, les polynômes sont denses dans $H(\Omega)$.

CORRIGÉ

Ce problème de 1968 est une démonstration du théorème de Mergelyan sur la densité des polynômes dans l'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$.

I.

▶ 1°/ γ_1 est C^∞ sur $\{x < 0\}$ et sur $\{x > 0\}$. Il suffit de l'étudier en 0. La dérivée à droite en 0 est la limite :

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} e^{-1/t^2} = 0$$

qui est égal à la dérivée à gauche en 0. γ est donc dérivable et sa dérivée $D\gamma_1 = 0$ si $t \leqslant 0$, $D\gamma_1 = \frac{2}{t^3}\gamma_1(t)$ si $t > 0$. Par récurrence, on montre que $D^n \gamma_1$ est dérivable :

$D^n \gamma_1 = P_n(\frac{1}{t})\gamma_1$ si $t > 0$, où P_n est un polynôme,

$D^n \gamma_1 = 0$ si $t \leqslant 0$. D'où la dérivée à droite en 0 :

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} P_n(\frac{1}{t}) \gamma_1 = 0$$

et $D^{n+1}\gamma_1 = P_{n+1}(\frac{1}{t})\gamma_1$ si $t > 0$, $D^{n+1}\gamma_1 = 0$ si $t \leqslant 0$.

Si $\gamma(z) = \gamma_1(\frac{1}{2} + |z|)\,\gamma_1(\frac{1}{2} - |z|)$ et si $|z| \geqslant \frac{1}{2}$,

$\gamma_1(\frac{1}{2} - (z)) = 0$ et $\gamma(z) = 0$. Si $|z| < \frac{1}{2}$, $\gamma(z) = \exp\left\{-\left(\frac{1}{\frac{1}{4} - |z|^2}\right)^2\right\}$

ce qui prouve que $z \longmapsto \gamma(z)$ est C^∞ à l'origine comme composée de fonctions C^∞ en 0 (notez que $z \longmapsto |z|$ n'est pas C^∞ en 0 !).
En dehors, de 0, $z \longmapsto |z|$ est C^∞ et γ est C^∞ pour la même raison.

▶ 2°/ χ est nulle si $|\zeta - z| \geqslant \frac{\alpha d}{2}$ avec $z \in \Omega_{1,\alpha}$ i.e. si ζ est dans le complémentaire de la réunion des boules de centre un point de Ω_1 de